



§ 4.4 关系的闭包

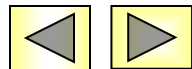
一、定义

闭包： 设 R 是 A 上的关系，则包含 R 而使之具有自反性质（对称性质或传递性质）的最小关系，称为 R 的自反闭包（对称闭包或传递闭包）。

自反闭包记作： $r(R)$

对称闭包记作： $s(R)$

传递闭包记作： $t(R)$





§ 4.4 关系的闭包

二、求解方法

设 R 是 A 上的关系，则

$$(1) r(R) = R \cup R^0$$

$$(2) s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$(3) t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$





§ 4.4 关系的闭包

矩阵形式：设 M 是 R 的关系矩阵，则

$$(1) M_r = M + E$$

$$(2) M_s = M + M'$$

$$(3) M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$$

其中 $+$ 均表示矩阵中对应元素的逻辑加。

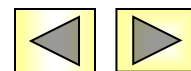




§ 4.4 关系的闭包

关系图表示:

- (1) 使 R 的关系图中所有顶点都有一个环, 便得到 $r(R)$ 的关系图。
- (2) 将 R 的关系图中所有的单向边改成双向边, 便得到 $s(R)$ 的关系图。
- (3) 使 R 的关系图中所有顶点到从它出发长度不超过 n (n 是图中顶点个数)的所有终点都有边, 便得到 $t(R)$ 的关系图。





§ 4.4 关系的闭包

例10： 设 $A = \{a, b, c\}$, A 上的关系 $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle \}$, 求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 。

解： $r(R) = R \cup R^0$

$$= R \cup \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$$

$$= \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle \}$$

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$= R \cup \{ \langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle c, b \rangle \}$$

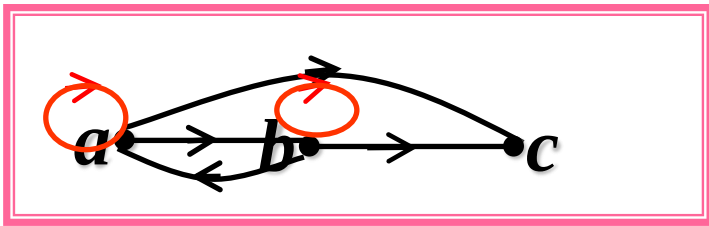
$$= \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle \}$$



§ 4.4 关系的闭包

例10： 设 $A = \{a, b, c\}$, A 上的关系 $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle \}$, 求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 。

解： $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$



则 $t(R) = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle \}$

§ 4.4 关系的闭包

例10: 设 $A = \{a, b, c\}$, A 上的关系 $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle \}$, 求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 。

解: $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

$$M_t = M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $t(R) = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle \}$

